МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии

_______Семенов Е.М.
11.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.ДВ.04.02 Основы теории пространств Понтрягина

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация:
Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация выпускника:
Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения:
очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:
кафедра теории функций и геометрии

6. Составители программы:
Усачев А.С., к.ф.-м.н., доцент кафедры теории функций и геометрии

7. Рекомендована:
НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 24.03.22 г.

8. Учебный год: 2025/2026 **Семестр(ы):** 8

9. **Цели и задачи учебной дисциплины**

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- глубокие знания студентов о методах, задачах и теоремах в теории пространств Понтрягина;
- применение студентами полученных знаний при решении задач прикладной математики и естествознания.

Задачи учебной дисциплины:

- научить студентов владеть теоретическим материалом;
- научить студентов решать задачи, использовать современные методы и подходы функционального анализа при решении прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: (*обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений (вариативная) блока Б1, к которой относится дисциплина; требования к входным знаниям, умениям и навыкам; дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей))*

Дисциплина «Основы теории пространств Понтрягина» входит в блок Б1 курсы по выбору программы и изучается в 9 семестре. Данный курс непосредственно связан с дисциплинами «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения с частными производными», «Элементы спектральной теории» изучаемыми в рамках программы подготовки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-3	Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПК-3.1;	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Знать: основные факты теории пространств с индефинитной метрикой. Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина. Владеть: методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.
		ПК-3.2	Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	Знать: основные факты и методы спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах Уметь: доказывать основные результаты спектральной теории операторов с помощью методологического аппарата современного функционального анализа. Владеть: навыками решения практических задач с использованием спектральной теории операторов

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (*в соответствии с учебным планом)* – 2/72.

Форма промежуточной аттестации *экзамен*

13. Трудоемкость по видам учебной работы

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Вид учебной работы</th><th colspan="4">Трудоемкость</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Всего</th><th colspan="3">По семестрам</th></tr>
<tr><th>9 семестр</th><th>…</th><th>…</th></tr>
<tr><td colspan="2">Контактная работа</td><td>32</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">в том числе:</td><td>лекции</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>практические</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>лабораторные</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>курсовая работа</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостоятельная работа</td><td>40</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Промежуточная аттестация (для экзамена)</td><td>36</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого:</td><td>72</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

13.1. Содержание дисциплины

<table>
<tr><th>п/п</th><th>Наименование раздела дисциплины</th><th>Содержание раздела дисциплины</th><th>Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Лекции</td><td></td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Гильбертово пространство. Линейный оператор.</td><td>Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Сопряженный оператор.</td><td>Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.</td><td>Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.</td><td>Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.
Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Пространство Понтрягина.</td><td>Определение. Каноническое разложение. Знаковые характеристики. Вырожденные и невырожденные подпространства. Изотропные подпространства. Ортогональное дополнение. Разложимость пространства.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Максимальные семидефинитные подпространства</td><td>Определение дефинитных, семидефинитных и максильных подпространств этих классов. Размерность. Проекционная полнота.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>Операторы в пространстве Понтрягина</td><td>Самосопряженные и унитарные операторы. Спектра операторов этих классов. Проблема инвариантных подпространств и ее решение.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>Пучок С.Г. Крейна</td><td>Определение пучка С,Г. Крейна. Линеаризация как самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина. Проблема инвариантного подпространства, полнота и базисность корневых векторов.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Практические занятия</td><td></td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Гильбертово</td><td>Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная</td><td></td></tr>
</table>

	пространство. Линейный оператор.	сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.	
2.2	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.	
2.3	Сопряженный оператор.	Определение. Существование и единственность. Свойства.	
2.4	Сопряженный оператор.	Пространство графика линейного оператора.	
2.5	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.	
2.6	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.	
2.7	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.	
2.8	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.	
2.9	Пространство Понтрягина.	Определение. Каноническое разложение. Знаковые характеристики. Вырожденные и невырожденные подпространства.	
2.10	Пространство Понтрягина.	Изотропные подпространства. Ортогональное дополнение. Разложимость пространства.	
2.11	Максимальные семидефинитные подпространства	Определение дефинитных, семидефинитных и максильных подпространств этих классов.	
2.12	Максимальные семидефинитные подпространства	Размерность. Проекционная полнота.	
2.13	Операторы в пространстве Понтрягина	Самосопряженные и унитарные операторы. Спектра операторов этих классов.	
2.14	Операторы в пространстве Понтрягина	Проблема инвариантных подпространств и ее решение.	
2.15	Пучок С.Г. Крейна	Определение пучка С,Г. Крейна.	
2.16	Пучок С.Г. Крейна	Линеаризация как самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина.	
2.17	Пучок С.Г. Крейна	Проблема инвариантного подпространства, полнота и базисность корневых векторов.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Гильбертово пространство. Линейный оператор	2	2	0	6	**10**
2	Сопряженный оператор.	2	2	0	6	**10**
3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	2	2	0	6	**10**
4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	2	2	0	4	**8**

5	Пространство Понтрягина.	2	2	0	4	**8**
6	Максимальные семидефинитные подпространства	2	2	0	6	**10**
7	Операторы в пространстве Понтрягина	2	2		4	**8**
8	Пучок С.Г. Крейна	2	6		4	**12**
	Итого:	**16**	**16**	**0**	**40**	**72**

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомендации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др.)

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторные и внеаудиторные (самостоятельные) формы учебной работы студента имеют своей целью приобретение им целостной системы знаний по дисциплине «Основы теории пространств Понтрягина». Используя лекционный материал, учебники, дополнительную литературу, проявляя творческий подход, студент готовится к практическим занятиям, рассматривая их как пополнение, углубление, систематизацию своих теоретических знаний. Студент должен прийти в ВУЗ с полным пониманием того, что самостоятельное овладение знаниями является главным, определяющим. Высшая школа лишь создает для этого необходимые условия.

Изучение каждой темы следует начинать с внимательного ознакомления с набором вопросов. Они ориентируют студента, показывают, что он должен знать по данной теме. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие вопросы темы программы учебного курса, и с какой глубиной раскрыты в данном учебном материале, а какие вообще опущены.

Освоение дисциплины предполагает следующие направления работы:
- изучение понятийного аппарата дисциплины;
- изучение тем самостоятельной подготовки по учебно-тематическому плану;
- работу над основной и дополнительной литературой;
- изучение вопросов для самоконтроля (самопроверки);
- самоподготовка к практическим и другим видам занятий;
- самостоятельная работа студента при подготовке к экзамену;
- самостоятельная работа студента в библиотеке;
- изучение сайтов по темам дисциплины в сети Интернет.

Требуется творческое отношение и к самой программе учебного курса. Вопросы, составляющие ее содержание, обладают разной степенью важности. Есть вопросы, выполняющие функцию логической связки содержания темы и всего курса, имеются вопросы описательного или разъяснительного характера. Все эти вопросы не составляют сути, понятийного, концептуального содержания темы, но необходимы для целостного восприятия изучаемых проблем.

Проработка лекционного курса является одной из важных активных форм самостоятельной работы. Лекция преподавателя не является озвученным учебником, а представляет плод его индивидуального творчества. Он читает свой авторский курс со своей логикой со своими теоретическими и методическими подходами. Это делает лекционный курс конкретного преподавателя индивидуально-личностным событием, которым вряд ли студенту стоит пренебрегать. Кроме того, в своих лекциях преподаватель стремится преодолеть многие недостатки, присущие опубликованным учебникам, учебным пособиям, лекционным курсам.

Количество часов, отведенных для лекционного курса, не позволяет реализовать в лекциях всей учебной программы. Исходя из этого, каждый лектор создает свою тематику лекций, которую в устной или письменной форме представляет студентам при первой встрече.

В создании своего авторского лекционного курса преподаватель руководствуется двумя документами – Федеральным государственным образовательным стандартом и учебной программой. Совершенно недостаточно только слушать лекции. Важно студенту понять, что лекция есть своеобразная творческая форма самостоятельной работы. Надо пытаться стать активным соучастником лекции: думать, сравнивать известное с вновь получаемыми знаниями, войти в логику изложения материала лектором, по возможности вступать с ним в мысленную полемику. Во время лекции можно задать лектору вопрос. Вопросы можно задать и во время перерыва (письменно или устно), а также после лекции или перед началом очередной. Лектор найдет формы и способы реагирования на вопросы студентов.

Методологические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Методологические рекомендации призваны помочь студентам организовать самостоятельную работу при изучении курса: с материалами лекций и семинарских занятий, литературы по общим и специальным вопросам. Самостоятельная работа студента должна опираться на сформированные навыки и умения, приобретенные во время обучения в средней школе. В ВУЗе студент должен повысить уровень самостоятельности. Составляющим компонентом его работы должно стать творчество. Работая с литературой по теме занятий, делайте выписки текста, содержащего характеристику или комментарии уже знакомого Вам источника. Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

При подготовке к экзамену следует в полной мере использовать лекционный материал и академический курс учебника, рекомендованного преподавателем.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	*Азизов Т.Я., Введение в теорию пространств Понтрягина// Азизов Т.Я, Копачевский Н.Д., Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского.Симферополь,2008.* *http://nikolay-d-kopachevsky.com/VTPP.pdf*

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	*Азизов Т.Я., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. М.: Наука, 1986.*
3	*Иохвидов И.С., Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Иохвидов И.С., Крейн М.Г,. Труды ММО,I, 1956, т.5; II,1959,т.8.*
4	*Азизов Т.Я., Линейные операторы в гильбертовом пространстве с G-метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С., УМН,т.26,№4,1971.* *http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&papered=5228&what=fullt&ption_lang=rus*
	Азизов Т.Я., Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С, .Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Математический анализ, т. 17 ,М.: Наука, 1979.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
4	*www.lib.vsu.ru – Зональная научная библиотека ВГУ*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)*

№ п/п	Источник
1	*Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: УРСС, 2004.*
2	*Азизов Т.Я., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. М.: Наука, 1986.*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (*При реализации дисциплины могут проводиться различные типы лекций (вводная, обзорная и т.д.), семинарские занятия (проблемные, дискуссионные и т.д.), применяться дистанционные образовательные технологии в части освоения лекционного материала, проведения текущей аттестации, самостоятельной работы по дисциплине или отдельным ее разделам и т.д. При применении ЭО и ДОТ необходимо в п.15 в) указать используемые ресурсы (см. пример выше)*)

При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.liv.vsu.ru и https://e.lanbook.com.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:
специального оборудования не требуется

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Гильбертово пространство. Линейный оператор	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	-
2	Сопряженный оператор.	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания Контрольная работа
4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания Контрольная работа
5	Пространство Понтрягина.	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
6	Максимальные семидефинитные подпространства	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
7	Операторы в пространстве Понтрягина	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
8	Пучок С.Г. Крейна	ПК-3	ПК-3.1. ПК-3.2.	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				*Перечень вопросов* *Практическое задание*

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Практико-ориентированные задания/домашние задания
Контрольная работа

(в виде развернутых ответов на следующие вопросы с обоснованием и необходимыми примерами)

1. Чем отличаются линейные многообразия от линейных подпространств?
2. Приведите пример линейного многообразия в пространстве C[0,1], которое не является подпространством.
3. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?
4. Как осуществляется процесс ортогонализации?
5. Как применяется процесс ортогонализации для построения систем ортогональных многочленов?
6. В чем состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье?
7. Чем отличается ортонормированный базис от ортонормированной системы?
8. Как определяется ортогональное дополнение для произвольного множества гильбертова пространства?
9. Является ли это множество замкнутым?
10. Как определяется замкнутая ортонормированная система?
11. Приведите примеры ортонормированных базисов.
12. Является ли линейный ограниченный оператор в ЛНП непрерывным?
13. Верно ли обратное утверждение?
14. Как определяется норма ограниченного оператора?
15. Как оценивается норма интегрального оператора в пространстве квадратично суммируемых функций?
16. Как формулируется теорема о продолжении оператора по непрерывности?
17. Как определяются действия над линейными операторами?
18. При каких условиях полно пространство операторов?
19. Как определяется сопряженное пространство к ЛНП?
20. Почему оно всегда полное?
21. Как определяются поточечная и равномерная сходимости последовательностей операторов?
22. Как связаны эти понятия?
23. Как понимается поточечная полнота пространства операторов?
24. В чем смысл принципа фиксации особенности?
25. Как связана обратимость оператора с разрешимостью операторного уравнения?
26. Является ли переход к обратному оператору непрерывной операцией?
27. Как понимается близость оператора к единичному или обратимому в соответствующих теоремах об обратимости?
28. Какой вид имеет оператор, обратный к оператору вида "единичный + интегральный с малой нормой"?
29. Как решаются интегральные уравнения с вырожденными ядрами?
30. Является ли регулярным значением число a, если уравнение (A- a I)x=y имеет единственное решение при любой правой части y ?
31. Как в доказательстве теоремы Хана - Банаха осуществляется продолжение функционала на одно измерение?
32. В каком смысле функционал может разделять элемент и подпространство?
33. Как определяется сопряженное пространство к линейному нормированному пространству?
34. Как определяется норма в сопряженном пространстве?
35. Является ли сопряженное пространство полным?
36. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве?
37. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных функций?
38. Как определяется второе сопряженное пространство?
39. Как осуществляется вложение банахова пространства во второе сопряженное?

40. Как определяется сопряженный оператор?
41. Как связаны матрицы оператора и сопряженного оператора в Rn ?
42. Как определяется слабая сходимость последовательностей функционалов?
43. Как связаны слабая сходимость и сходимость по норме?
44. Как вопрос о сходимости квадратурных формул сводится к вопросу о слабой сходимости функционалов?
45. При каком условии из слабой сходимости последовательности элементов в гильбертовом пространстве следует ее сходимость по норме?
46. Как определяется понятие слабой компактности множества элементов?
47. Как определяется вполне непрерывный оператор?
48. Является ли он ограниченным?
49. Является ли единичный оператор вполне непрерывным?
50. На основании какого результата устанавливается полная непрерывность интегрального оператора в пространстве непрерывных функций?
51. Как устанавливается полная непрерывность оператора Гильберта - Шмидта?
52. Почему ядро оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный"является конечномерным подпространством?
53. Может ли ядро вполне непрерывного оператора быть бесконечномерным?
54. Является ли образ оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный" замкнутым?
55. Следует ли из теоремы о спектре вполне непрерывного оператора существование ненулевого собственного значения?
56. Может ли вполне непрерывный оператор для ненулевого собственного значения иметь бесконечную линейно независимую систему собственных векторов?
57. Пусть при некоторой фиксированной правой части операторное уравнение с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный" имеет единственное решение. Что можно сказать о разрешимости этого уравнения при любой правой части? Сохранится ли единственность?
58. Как формулируются условия разрешимости операторного уравнения.
59. Как определяется гильбертово сопряженный оператор?
60. На основании какой теоремы утверждается его существование?
61. Как устанавливается вещественность собственных значений самосопряженного оператора?
62. Как используется вещественность собственных значений ССО в доказательстве теоремы о регулярном значении?
63. Как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора?
64. Из каких результатов следует существование ненулевого собственного значения у самосопряженного вполне непрерывного оператора?

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Практико-ориентированные задания
Контрольная работа

Перечень вопросов:

1. Неравенство Коши-Буняковского.
2. Слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве.
3. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

4. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность.
5. Замкнутые линейные операторы.
6. Свойства. Теорема Банаха.
7. Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.
8. Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек.
9. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
10. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
11. Простейшие свойства самосопряженных операторов,
12. Свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция
13. Критерии существования самосопряженных расширений.
14. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
15. Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
16. Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
17. Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
18. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
19. Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
20. Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
21. Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
22. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
23. Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.

Перечень задач:

Задача 1. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на [0;1] функций x(t) таких, что $\left|x(0)\right| \le K_1$, $\int\limits_0^1 \left|x'(t)\right|^2 dt \le K_2$ где $K_1, K_2 > 0$ – постоянные, компактно в пространстве C[0;1].

Указание. Согласно теореме Арцела-Асколи, для предкомпактности семейства функций $M \subset C[a;b] \Leftrightarrow$ равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность этого семейства. Если предкомпактное множество замкнуто, то оно компактно.

Задача 2. Будет ли компактным множество всех степеней x^n ($n \in \mathbf{N}$) в пространстве C[0;1].

Ответ. Нет.

Решение. Из последовательности элементов любого полного компакта можно выделить сходящуюся в нем подпоследовательность. Но любая бесконечная подпоследовательность из $\{x^n\}$ сходится к разрывной функции f(x) = {1, if x = 1; 0 otherwise}.

Задача 3. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

Указание. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена. Рассмотрим точки вида e_k (где на k-ом месте в последовательности стоит 1, а на остальных - 0). Расстояние между любыми двумя различными точками e_m и e_n равно $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ в S не существует конечной ε-сети (в каждом шаре радиуса ε с центром в узле такой ε-сети будет лежать не более одной точки e_k).

Задача 4. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.

Указание. В конечномерном пространстве компактность означает замкнутость и ограниченность, поэтому замыкание всякого ограниченного множества компактно.

Задача 5. Доказать, что следующие функционалы в пространстве C[-1;1] являются линейными и непрерывными; найти их нормы.

а) $f(x) = \frac{1}{3}\left[x(-1) + x(1)\right]$

Указание. Любой функционал вида $g[x;t_0] = x(t_0)$, очевидно, является линейным и непрерывным. f(x) является линейной комбинацией таких функционалов. $\| g[x;t_0] \| \equiv 1$. $\| f \| = 2/3$.

б) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$

Указание. Линейность следует из линейности интеграла Римана I(x;[a;b]). Функционал вида I(x;[a;b]) ограничен и имеет норму (b-a). $\| f \| = 2$

в) $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$

Указание. Любой функционал вида $J(x;y_0;[a;b]) = \int_a^b y_0(t)x(t)dt$ линеен по x и ограничен. $\| J \| = \int_a^b | y_0(t) | \, dt$. Таким образом, $\| f \| = 1$.

Задача 6. Пусть X – множество функций f(x), определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?

Ответ. Нет.

Указание. Докажем, что пространство X не будет полным. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \{exp(- x^2)$, если $|x|\le n$; 0, если $|x|>n\}$. Очевидно, что эта последовательность фундаметальна, но сходится к функции $f(x)=exp(-x^2)\notin X$.

Задача 7. Является ли пространство непрерывных на отрезке [0;1] функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$?

Ответ. Нет.

Указание. Если предположить, что C[0;1] с заданным таким образом скалярным произведением есть гильбертово, то имеем подпространство в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$. Можно подобрать последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ из L_2, сходящуюся к разрывной функции $f(x) = \{0$, <u>if x ≤ 1/2</u>, 1, <u>otherwise</u>). Таким образом, подпространство C[0;1] не полно ⇒ противоречие.

Задача 8. Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $\|x_n\|\to\|x\|$, то последовательность x_n сходится сильно, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$.

Указание. Предположим, что H сепарабельно. Тогда оно изоморфно пространству l_2. Поэтому достаточно доказать это утверждение для пространства l_2. Действительно, $\|x_n - x\|^2=(x_n-x,x_n-x)=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2(x,x_n)= \|x_n\|^2-\|x\|^2+2(x,x-x_n)\to 0$ (т.к. согласно слабой сходимости, $(x,x_n-x) \to 0$).

Задача 9. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.

Указание. Считаем, что пространство H сепарабельно. Функционал F(x)=(a,x) достигает нормы $\|F\|=\|a\|$ на элементе $a/\|a\|$.

Задача 10. Найти норму оператора A, действующего в пространстве C[0;1], (или в пространстве $L_2[0;1]$): $Ax = tx(t)$.

Ответ. $\|A\| = \sup \{\|Ax\| \ (\|x\| \le 1)\} = 1$.

Задача 11. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A:l_2\to l_2$, где $A(x_1,\dots,x_n,\dots)= A(0,x_1,\dots,x_n,\dots)$.

Указание. Сопряженным к l_2 является пространство функционалов вида G(x)=(g,x), где $g\in l_2$. Нужно подобрать оператор A^* на множестве таких функционалов, такой что $(g,Ax)=(A^*g,x)$. Для функционала G(x)=(g,x), где $g=(g_1,g_2,\dots,g_n,\dots)$ положим $A^*G(x)=G'(x)=(g',x)$, где $g'=(g_2,g_3,\dots, g_n,\dots)$. Поскольку A переводит единичный шар в единичный шар, то $\|A\| = 1$. Поскольку оператор A ограничен и пространство l_2 банахово, то $\|A^*\| = \|A\| = 1$.

Задача 12. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве

l_2: $A(x_1,\dots,x_n,\dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n=1/n, n\in\mathbf{N}\}$.

Указание. Оператор А компактен, поэтому его спектр состоит из нуля и собственных значений. Числа λ_n являются собственными значениями, т.к. $\mathrm{Ker}(A-\lambda_n I)\neq\{0\}$.

Задача 13. В пространстве l_2 задан оператор А: $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$. Доказать, что оператор А компактен, найти его спектр.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\}$.

Указание. Оператор А компактен, т.к. является композицией компактного оператора из задачи 52 и ограниченного оператора (сдвига). Поскольку оператор задан в гильбертовом пространстве и компактен, то число 0 входит в его спектр. Легко показать, что собственных значений у оператора нет: из $(A-\lambda I)x = 0$, $\lambda\neq 0$ следует $x = 0$.

Задача 14. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.

Пример. Пространство $\{P_i(x)\}$ всевозможных многочленов над $\mathbf{R}$. Норма: $\|P\|=\max(|P(x)|)$ на отрезке $[0;1/2]$. Функционал $f(P) = P(1)$. Функционал f не является непрерывным. В самом деле, рассмотрим последовательность $P_n=x^n$. Очевидно, что $\|P_n\| \to 0$, но $f(P_n)\to\infty$.

на контрольной работе:

Отлично	отличное решение задач
Хорошо	решение задач не ниже хорошего уровня
Удовлетворительно	удовлетворительное решение задач
Неудовлетворительно	неудовлетворительное решение задач

на экзамене:

Отлично	отличное владение теорией и решение задач не ниже хорошего уровня; или отличное решение задач и владение теорией не ниже хорошего уровня
Хорошо	владение теорией не ниже хорошего уровня и решение задач не ниже удовлетворительного уровня; или владение теорией не ниже удовлетворительного уровня и решение задач не ниже хорошего уровня
Удовлетворительно	удовлетворительное владение теорией и удовлетворительное решение задач
Неудовлетворительно	неудовлетворительное владение теорией; или неудовлетворительное решение задач